حل تمرین‌های سری سوم فرآیندهای تصادفی

۱- فرآیند $X(t)$ را می‌توان نتیجهٔ عبور فرآیند ضربه‌های پواسن (مثلاً $X_1(t)$) از سیستم با پاسخ ضربه‌ای چهارگوش به عرض و ارتفاع یک دانست.

$$h(t)=\text{rect}(t) \;\leftrightarrow\; H(f)=\text{sinc}(f)$$
$$m_X(t)=h(t)*m_{X_1}(t)=\text{rect}(t)*\lambda=\lambda$$
$$S_{XX}(f)=S_{X_1X_1}(f)|H(f)|^2=\;[\lambda+\lambda^2\delta(f)]\text{sinc}^2(f)$$
$$S_{XX}(f)=\lambda\text{sinc}^2(f)+\lambda^2\delta(f) \;\leftrightarrow\; R_{XX}(\tau)=\lambda\Lambda(\tau)+\lambda^2 \quad , \quad P_X=R(0)=\lambda+\lambda^2$$

-۲

الف) فرآیند $X(t)$ را می‌توان نتیجهٔ عبور فرآیند ضربه‌های پواسون، $P(t)$، از سیستم با پاسخ ضربهٔ مثلثی با قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۱ ، $h(t)$، دانست. در نتیجه:

$$H(f)=\text{sinc}^2(f)$$
$$m_X(t)=h(t)*m_P(t)=h(t)*\lambda=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h(t)dt=\lambda$$
$$S_{XX}(f)=S_{PP}(f)\,|\,H(f)\,|^2=[\lambda+\lambda^2\delta(f)]\text{sinc}^4(f)=\lambda\text{sinc}^4(f)+\lambda^2\delta(f)$$
$$R_{XX}(\tau)=\lambda\,h(\tau)*h(\tau)+\lambda^2 \quad , \quad P_X=R_{XX}(0)=\lambda^2+\lambda$$

ب) برای آن‌که در یک همسایگی از زمان $t=t_0$ مقدار فرآیند ثابت و غیر صفر باشد، باید تعداد ضربه‌های پواسون که در فاصلهٔ $[t_0,t_0+1)$ اتفاق می‌افتد با تعداد ضربه‌های پواسون که در فاصلهٔ $(t_0-1,t_0]$ اتفاق می‌افتد برابر و این تعداد غیر صفر باشد. در نتیجه:

$$P=\sum_{k=1}^{\infty}(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!})\times(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!})=e^{-2\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}=e^{-2\lambda}(I_0(2\lambda)-1)$$

$I_0(x)$: تابع بسل اصلاح شدهٔ مرتبهٔ صفر

پ) برای تشکیل بازهٔ زمانی صفر، باید فاصلهٔ دو ضربهٔ پواسون متوالی بیشتر از ۲ باشد. احتمال آن‌که طول بازهٔ زمانی صفر بزرگتر از ℓ باشد برابر است با احتمال این‌که فاصلهٔ دو ضربهٔ پواسون بیشتر از $\ell+2$ باشد به شرط آن‌که فاصلهٔ آن‌ها بیشتر از ۲ است:

$$\Pr\{L>\ell\}=\frac{e^{-\lambda(\ell+2)}u(\ell)}{e^{-2\lambda}}=e^{-\lambda\ell}u(\ell) \;\rightarrow\; F_L(\ell)=(1-e^{-\lambda\ell})u(\ell) \;\rightarrow\; f_L(\ell)=\lambda e^{-\lambda\ell}u(\ell)$$
$$\rightarrow\; E\{L\}=\lambda$$

-۳

فرض $R(\tau)=M(\tau)e^{j\varphi(\tau)}$ که در آن $M(\tau)$ (اندازه) و $\varphi(\tau)$ (فاز) دو تابع حقیقی هستند.

$$E\{|\,x(t+\tau)-e^{j\varphi(\tau)}x(t)\,|^2\}\;=\;E\{[x(t+\tau)-e^{j\varphi(\tau)}x(t)][x^*(t+\tau)-e^{-j\varphi(\tau)}x^*(t)]\}$$
$$=\;E\{|\,x(t+\tau)\,|^2\}+E\{|\,x(t)\,|^2\}-e^{j\varphi(\tau)}E\{x^*(t+\tau)x(t)\}-e^{-j\varphi(\tau)}E\{x(t+\tau)x^*(t)]\}$$
$$=\;R(0)+R(0)-e^{j\varphi(\tau)}R^*(\tau)-e^{-j\varphi(\tau)}R(\tau)\;=\;2R(0)-e^{j\varphi(\tau)}R^*(\tau)-e^{-j\varphi(\tau)}R(\tau)$$
$$=\;2R(0)-e^{j\varphi(\tau)}M(\tau)e^{-j\varphi(\tau)}-e^{-j\varphi(\tau)}M(\tau)e^{j\varphi(\tau)}\;=\;2R(0)-2M(\tau)$$
$$=\;2[R(0)-|R(\tau)|]$$

برای همهٔ مقادیر t و τ:

$$R(0)=|R(\tau_1)| \;\rightarrow\; E\{|\,x(t+\tau_1)-e^{j\varphi(\tau_1)}x(t)\,|^2\}\;=\;0 \qquad (1)$$

با قرار دادن $z=x(t+\lambda+\tau)-e^{j\varphi(\tau)}x(t+\lambda)$ و $u=x^*(t)$ در نامساوی شوارتز $|E\{zu\}|^2\le E\{|z|^2\}\;E\{|u|^2\}$ خواهیم داشت:

$$\left|E\{[x(t+\lambda+\tau)-e^{j\varphi(\tau)}x(t+\lambda)]x^*(t)\right|^2 \le E\{\left|x(t+\lambda+\tau)-e^{j\varphi(\tau)}x(t+\lambda)\right|^2\}E\{|x^*(t)|^2\}$$

$$\rightarrow \left|E\{x(t+\lambda+\tau)x^*(t)\}-e^{j\varphi(\tau)}E\{x(t+\lambda)x^*(t)\}\right|^2 \le E\{\left|x(t+\lambda+\tau)-e^{j\varphi(\tau)}x(t+\lambda)\right|^2\}E\{|x^*(t)|^2\} \rightarrow$$

$$\left|R(\lambda+\tau)-e^{j\varphi(\tau)}R(\lambda)\right|^2 \le E\{\left|x(t+\lambda+\tau)-e^{j\varphi(\tau)}x(t+\lambda)\right|^2\}R(0)$$ برای همهٔ مقادیر t و τ:

اگر $\tau=\tau_1$، با توجه به (1):

$$R(\lambda+\tau_1)=e^{j\varphi(\tau_1)}R(\lambda) \rightarrow \left|R(\lambda+\tau_1)-e^{j\varphi(\tau_1)}R(\lambda)\right|^2 \le 0 \qquad (2)$$

$$\rightarrow \quad M(\lambda+\tau_1)e^{j\varphi(\lambda+\tau_1)}=e^{j\varphi(\tau_1)}M(\lambda)e^{j\varphi(\lambda)} \rightarrow \begin{cases} M(\lambda+\tau_1)=M(\lambda) \\ \varphi(\lambda+\tau_1)=\varphi(\lambda)+\varphi(\tau_1) \end{cases}$$ برای همهٔ مقادیر λ (3)

تعریف می‌کنیم: $w(\tau)=e^{-j\omega_o\tau}R(\tau)$ که در آن $\omega_o=\varphi(\tau_1)/\tau_1$، آن‌گاه برای همهٔ λها:

$$w(\lambda+\tau_1) = e^{-j\omega_o(\lambda+\tau_1)}R(\lambda+\tau_1) \overset{(2)}{=} e^{-j\omega_o\lambda}e^{-j\omega_o\tau_1}e^{j\varphi(\tau_1)}R(\lambda) = e^{-j\omega_o\lambda}R(\lambda) = w(\lambda) \rightarrow$$

بنابراین، $w(\tau)$ پریودیک است و $R(\tau)=w(\tau)e^{j\omega_o\tau}$.

تعریف می‌کنیم: $y(t)=e^{-j\omega_o t}x(t)$، آن‌گاه:

$$\begin{aligned}
E\{\left|y(t+\tau_1)-y(t)\right|^2\} &= E\{[y(t+\tau_1)-y(t)][y^*(t+\tau_1)-y^*(t)]\} \\
&= E\{\left|y(t+\tau_1)\right|^2\}+E\{\left|y(t)\right|^2\}-E\{y(t+\tau_1)y^*(t)\}-E\{y^*(t+\tau_1)y(t)\} \\
&= E\{\left|x(t+\tau_1)\right|^2\}+E\{\left|x(t)\right|^2\}-E\{x(t+\tau_1)x^*(t)e^{-j\omega_o\tau}\}-E\{x^*(t+\tau_1)x(t)e^{j\omega_o\tau}\} \\
&= R(0)+R(0)-E\{x(t+\tau_1)x^*(t)\}e^{-j\omega_o\tau_1}-[E\{x(t+\tau_1)x^*(t)\}e^{-j\omega_o\tau_1}]^* \\
&= 2R(0)-[R(\tau_1)e^{-j\varphi(\tau_1)}]-[R(\tau_1)e^{-j\varphi(\tau_1)}]^* = 2R(0)-2\operatorname{Re}\{M(\tau_1)\} \\
&= 2[R(0)-M(\tau_1)] = 2[R(0)-\left|R(\tau_1)\right|]=0
\end{aligned}$$

بنابراین $y(t)$ یک فرآیند MS پریودیک با همان پریود $w(\tau)$ است و $x(t)=y(t)e^{j\omega_o t}$.

-۴

الف) فرآیند پواسن را $X(t)$ می‌نامیم.

$$m_X(t)=a_{0,t}=\int_0^t a\cos^2(\omega_0 t)dt=\frac{at}{2}+\frac{a}{4\omega_0}\sin(2\omega_0 t)$$

$$C_{XX}(t_1,t_2)=a_{0,t}\min(t_1,t_2)=m_X(t_1)u(t_2-t_1)+m_X(t_2)u(t_1-t_2)$$

ب) فرآیند ضربه‌های پواسن را $Y(t)$ می‌نامیم و می‌دانیم $Y(t)=X'(t)$ است.

$$m_Y(t)=m'_X(t) = \frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos(2\omega_0 t)=a\cos^2(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned}
C_{YY}(t_1,t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}C_{XX}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_2}[m'(t_1)u(t_2-t_1)-m(t_1)\delta(t_2-t_1)+m(t_2)\delta(t_2-t_1)] \\
&= m'(t_1)\delta(t_2-t_1)=a\cos^2(\omega_0 t_2)\delta(t_2-t_1)
\end{aligned}$$

$$R_{\tilde{y}\tilde{y}}(t+\tau,t)=C_{yy}(t+\tau,t)=a\cos^2(\omega_0 t)\delta(\tau)$$

$$R_{yy}(t+\tau,t)=a\cos^2(\omega_0 t)\delta(\tau)+m_Y(t+\tau)m_Y(t)=a\cos^2(\omega_0 t)\delta(\tau)+a^2\cos^2(\omega_0(t+\tau))\cos^2(\omega_0 t)$$

پ)

$$R_{yy}(t+\tau,t)=\frac{a}{2}[1+\cos(2\omega_0 t)]\delta(\tau)+\frac{a^2}{4}[1+\cos(2\omega_0(t+\tau))][1+\cos(2\omega_0 t)] \quad \rightarrow$$

$$<R_{yy}(t+\tau,t)>_t=\frac{a}{2}\delta(\tau)+\frac{a^2}{4}[1+<\cos(2\omega_0(t+\tau))\cos(2\omega_0 t)>_t]$$

$$=\frac{a}{2}\delta(\tau)+\frac{a^2}{4}[1+\frac{1}{2}<\cos(2\omega_0\tau)+\cos(4\omega_0 t+2\omega_0\tau)>_t]$$

$$=\frac{a}{2}\delta(\tau)+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{8}\cos(2\omega_0\tau)$$

$$S_{yy}(f)=\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}\delta(f)+\frac{a^2}{16}\delta(f-2f_0)+\frac{a^2}{16}\delta(f+2f_0)$$

۵-

الف)

$$H_1(f)=\frac{X(f)}{N(f)}=\frac{4j\omega/(1+4j\omega)}{4j\omega/(1+4j\omega)+1+6j\omega}=\frac{4j\omega}{1+14j\omega-24\omega^2} \quad \rightarrow$$

$$S_X(f)=S_N(f)\,|H_1(f)|^2=|H_1(f)|^2=\frac{16\omega^2}{(1-24\omega^2)^2+14^2\omega^2}=\frac{16\omega^2}{(1+4\omega^2)(1+144\omega^2)}$$

$$H_2(f)=\frac{Y(f)}{N(f)}=\frac{1/(4j\omega)}{1/(4j\omega)+1+1/(1+6j\omega)}=\frac{1+6j\omega}{1+14j\omega-24\omega^2} \quad \rightarrow$$

$$S_{YX}(f)=H_2(f)H_1^*(f)S_N(f)=H_2(f)H_1^*(f)=\frac{-4j\omega+24\omega^2}{(1+4\omega^2)(1+144\omega^2)}$$

ب)

$$S_Y(f)=S_N(f)\,|H_2(f)|^2=|H_2(f)|^2=\frac{1+36\omega^2}{(1+4\omega^2)(1+144\omega^2)}=\frac{8/35}{1+4\omega^2}+\frac{27/35}{1+144\omega^2} \quad \rightarrow$$

$$R_Y(\tau)=\frac{2}{35}e^{-\frac{1}{2}|\tau|}+\frac{9}{280}e^{-\frac{1}{12}|\tau|} \quad \rightarrow \quad P_Y=R_Y(0)=\frac{5}{56}$$

پ)

$$m_N(t)=0 \quad \rightarrow \quad m_X(t)=m_Y(t)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_X(\tau)=R_X(\tau)\ ,\ C_Y(\tau)=R_Y(\tau) \\ C_{YX}(\tau)=R_{YX}(\tau) \end{cases}$$

$$\rho_{Y(1),X(1)}=\frac{C_{YX}(0)}{\sqrt{C_X(0)C_Y(0)}}=\frac{R_{YX}(0)}{\sqrt{R_X(0)R_Y(0)}}$$

$$R_{YX}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{YX}(f)df=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-4j\omega}{(1+4\omega^2)(1+144\omega^2)}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{24\omega^2}{(1+4\omega^2)(1+144\omega^2)}d\omega$$

$$=0+\frac{24}{16}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(f)d\omega]=\frac{3}{2}R_X(0)$$

$$S_X(f)=\frac{4/35}{1+4\omega^2}+\frac{-4/35}{1+144\omega^2} \quad \rightarrow \quad R_X(\tau)=\frac{1}{35}e^{-\frac{1}{2}|\tau|}-\frac{1}{210}e^{-\frac{1}{12}|\tau|} \quad \rightarrow \quad R_X(0)=\frac{1}{42}$$

$$\rightarrow \quad \rho_{Y(1),X(1)}=\frac{(3/2)\times(1/42)}{\sqrt{(1/42)\times(5/56)}}=\sqrt{0.6}=0.775$$

۶-

الف)

$$R_X(\tau)=|m_X|^2+C_X(\tau)=1+e^{-\tau^2/2}\quad\rightarrow\quad R_{XX'}(\tau)=-\frac{d}{d\tau}R_X(\tau)=\tau e^{-\tau^2/2}\quad\rightarrow$$

$$R_{X'}(\tau)=-\frac{d^2}{d\tau^2}R_X(\tau)=(1-\tau^2)\,e^{-\tau^2/2}$$

$$R=E\{\begin{bmatrix}X(t_0)\\X'(t_0)\\X'(t_0-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(t_0) & X'(t_0) & X'(t_0-1)\end{bmatrix}\}$$

$$=\begin{bmatrix}R_X(0) & R_{XX'}(0) & R_{XX'}(-1)\\R_{X'X}(0) & R_{X'}(0) & R_{X'}(1)\\R_{X'X}(-1) & R_{X'}(-1) & R_{X'}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & e^{-0.5}\\0 & 1 & 0\\e^{-0.5} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ب)

$$S_{X'}(f)=|H(f)|^2\,S_X(f)=|j\omega|^2\,S_X(f)=\omega^2(\delta(f)+\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2f^2})=\sqrt{2\pi}(4\pi^2f^2)e^{-2\pi^2f^2}$$

$$S_{X'X}(f)=H(f)S_X(f)=j\omega S_X(f)=j\omega(\delta(f)+\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2f^2})=j(2\pi f)\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2f^2}$$

$$S_{XX'}(f)=H^*(f)S_X(f)=-j\omega S_X(f)=-j\omega(\delta(f)+\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2f^2})=-j(2\pi f)\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2f^2}$$

پ)

چون $X(t)$ نرمال است، $X(t_0)$ و $X'(t_0)$ تواماً نرمال هستند و چون $R_{XX'}(0)=0$ است، متعامد هستند. همچنین $E\{X'(t_0)\}=m'_X(t_0)=0$ است، پس $X(t_0)$ و $X'(t_0)$ ناهمیسته و به دلیل نرمال بودن مستقل هستند.

$$Var(X'(t_0))=C_{X'}(0)=R_{X'}(0)=1\qquad\rightarrow\ f_{X'(t_0)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_1^2}{2}}$$

$$E\{X(t_0)\}=1,\ Var(X(t_0))=C_X(0)=1\ \rightarrow\ f_{X(t_0)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_2-1)^2}{2}}\ \Rightarrow\ f_{X'(t_0),X(t_0)}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x_1^2+(x_2-1)^2}{2}}$$

ت) چون $X'(t_1)$ و $X'(t_2)$ تواماً نرمال هستند، برای استقلال کافی است ناهمبسته باشند و چون متوسط صفر دارند، کافی است متعامد باشند. یعنی: $R_{X'}(\tau)=0\ \rightarrow\ |\tau|=1,\infty$

یعنی به ازای $|t_2-t_1|=1,\infty$ مستقل‌اند.

۷-

الف)

چون $X(t)$ نرمال است، به ازای هر t_1 و t_2، دو متغیر تصادفی $Y(t_1)$ و $Z(t_2)$ تواماً نرمال هستند. در نتیجه:

$$m_Y(t_1)=h_1(t_1)*m_X(t_1)=m_X\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\alpha)d\alpha=m_XH_1(0)=2\times2=4$$

$$m_Z(t_2)=h_2(t_2)*m_X(t_2)=m_X\int_{-\infty}^{\infty}h_2(\alpha)d\alpha=m_XH_2(0)=2\times0=0$$

$$Var(Y(t_1))=R_{\tilde{Y}}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\tilde{Y}}(f)df=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\tilde{X}}(f)\,|H_1(f)|^2\,df=\int_{-\infty}^{\infty}|H_1(f)|^2\,df=8$$

$$Var(Z(t_2))=R_{\tilde{Z}}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\tilde{Z}}(f)df=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\tilde{X}}(f)\,|H_2(f)|^2\,df=\int_{-\infty}^{\infty}|H_2(f)|^2\,df=2$$

$$S_{\tilde{Y}\tilde{Z}}(f)=H_1(f)H_2^*(f)S_{\tilde{X}}(f)=\begin{cases}2 & 0.5<|f|<1\\0 & Otherwise\end{cases}\qquad\rightarrow\qquad R_{\tilde{Y}\tilde{Z}}(\tau)=2\,\mathrm{sinc}(\frac{\tau}{2})\cos(1.5\pi\tau)$$

در این بخش: $Y_1=Y(t_1)$ و $Z_1=Z(t_1)$. بنابراین: $m_{Y_1}=4\ ,\ m_{Z_1}=0\ ,\ \sigma_{Y_1}^2=8\ ,\ \sigma_{z_1}^2=2$

$$f_{Y_1}(y)=\frac{1}{\sqrt{16\pi}}e^{-\frac{(y-4)^2}{16}} \quad , \quad f_{Z_1}(z)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

$$\rho_{Y_1Z_1}=\frac{R_{Y_1Z_1}(0)}{\sqrt{\sigma_{Y_1}^2\sigma_{Z_1}^2}}=\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad f_{Y_1Z_1}(y,z)=\frac{\sqrt{2}}{8\pi}e^{-[\frac{(y-4)^2}{8}+\frac{z^2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}(y-4)z]}$$

ب) به ازای هر t_1 و t_2، دو متغیر تصادفی $Y_1=Y(t_1)$ و $Z_2=Z(t_2)$ تواماً نرمال هستند، برای مستقل بودن کافی است ناهمبسته باشند.

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Z_2)=R_{\widetilde{Y}\widetilde{Z}}(\tau)=2\,\mathrm{sinc}(\frac{\tau}{2})\cos(1.5\pi\tau)=0 \quad , \quad \tau=t_1-t_2$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1-t_2=2k & , \ k=\pm1,\pm2,... \\ t_1-t_2=\frac{2}{3}k+\frac{1}{3} & , \ k=0,\pm1,\pm2,... \end{cases}$$

۸-

الف)

$$S_X(\omega)=\frac{4\omega^2+900}{\omega^4+450\omega^2+3969} \quad \rightarrow \quad S_X(s)=\frac{900-4s^2}{s^4-450s^2+3969}=\frac{(30-2s)(30+2s)}{(s-3)(s+3)(s-21)(s+21)}$$

$$\rightarrow \ S_X(s)=\frac{1}{3}(\frac{-1}{s-3}+\frac{1}{s+3})+\frac{1}{21}(\frac{-1}{s-21}+\frac{1}{s+21}) \ \rightarrow \ R_X(\tau)=\frac{1}{3}e^{-3|\tau|}+\frac{1}{21}e^{-21|\tau|}$$

ب)

چون در طیف ضربه وجود ندارد متوسط هریک از متغیرهای تصادفی سیگنال صفر است. $m_X=E\{X(t_0)\}=0$

$$\sigma_X^2=\mathrm{Var}(X(t_0))=R_X(0)-|m_X|^2=\frac{8}{21}$$

$$R_X(0.01)=0.3621 \quad \rightarrow \ \rho=\frac{R_X(0.01)-|m_X|^2}{\sigma_X^2}=\frac{0.3621}{8/21}=0.9505$$

پ)

فیلتر سفید کنندهٔ فرآیند $X(t)$: $\Gamma_X(s)=\frac{(s+3)(s+21)}{(30+2s)}$

فیلتر ابداع فرآیند $Y(t)$: $L_Y(s)=\frac{\sqrt{6}}{s+3}$ $\quad (R_Y(\tau)=e^{-3|\tau|} \leftrightarrow S_Y(s)=\frac{6}{(3-s)(3+s)})$

فیلتر موردنظر: $H(s)=L_Y(s)\Gamma_X(s)=\frac{\sqrt{6}(s+21)}{(30+2s)}$

۹-

$$e^{-|\tau|} \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{2}{1+(2\pi f)^2}$$

چون تمام مشخصات آماری $X(t)$ و $Y(t)$ یکی هستند، آن‌گاه $R_{XX}(\tau)=R_{YY}(\tau)$ و در نتیجه: $S_{XX}(f)=S_{YY}(f)$.

اما از طرفی: $S_{YY}(f)=S_{XX}(f)[1-H(f)]^2$ که نتیجه می‌دهد:

$$S_{XX}(f)[H^2(f)-2H(f)]=0$$

همواره $S_{XX}(f)\neq 0$، بنابراین به ازای هر f باید: $H(f)=0$ یا $H(f)=2$. با توجه به پایین‌گذر و حقیقی بودن، $H(f)$ برابر است با:

$$H(f)=\begin{cases} 2 & |f|\leq f_0 \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

چون $X(t)$ و $Y(t)$ به ازای هر t مستقل‌اند، در نتیجه: $R_{XY}(0)=0$. بنابراین:

$$R_{XY}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{XX}(f)(1-H(f))df=0 \;\rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty}S_{XX}(f)df=2\int_{-f_0}^{f_0}S_{XX}(f)df$$

$$\rightarrow\; R_{XX}(0)=4\int_{0}^{f_0}S_{XX}(f)df=\frac{4}{\pi}Arc\tan(2\pi f_0)=1 \;\rightarrow\; f_0=\frac{1}{2\pi}$$

-۱۰

اگر مقدار ماکزیمم $|H(f)|^2$ در فرکانس $f=f_0$ و مقدار آن برابر با $|H_m|^2$ باشد، داریم: $|H(f)|^2 \le |H_m|^2$ و تساوی در $f=f_0$ رخ می‌دهد. بنابراین:

$$P_Y=\int_{-\infty}^{\infty}S_Y(f)df=\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2S_X(f)df \le \int_{-\infty}^{\infty}|H_m|^2S_X(f)df=|H_m|^2P_X=|H_m|^2$$

پس حداکثر قدرت خروجی برابر با $|H_m|^2$ می‌شود و این حداکثر زمانی حاصل می‌شود (حالت تساوی) که:

$$\forall f:\; |H(f)|^2S_X(f)=H_m^2S_X(f) \;\rightarrow\; S_X(f)(|H(f)|^2-H_m^2)=0 \;\rightarrow\; S_X(f)=0\;,\;\forall f\neq f_0$$

و با توجه به این‌که $P_X=1$ است، پس انتگرال $S_X(f)$ باید برابر با یک شود. پس کافی است $S_X(f)=\delta(f-f_0)$ باشد. یعنی تمام قدرت ورودی در فرکانسی باشد که سیستم بیشترین بهره را دارد.

$$|H(f)|^2=\frac{1}{(5-4\pi^2f^2)^2+16\pi^2f^2} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial f}|H(f)|^2=0} f=f_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\quad,\quad |H_m|^2=\frac{1}{16}$$

چون در دو محل $|H(f)|^2=|H_m|^2$ شده است، پس کافی است در هر فرکانس ضربه‌ای به مقدار $\frac{1}{2}$ قرار دهیم. یعنی:

$$S_X(f)=\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0) \;\rightarrow\; R_X(\tau)=\cos(2\pi f_0\tau)=\cos(\sqrt{3}\tau)\quad,\quad P_Y=\frac{1}{16}$$

-۱۱

الف)

$$S_X(f)=1+\frac{-j}{1+j2\pi f}+\frac{j}{1-j2\pi f} \;\rightarrow\; R_X(\tau)=\delta(\tau)-je^{-\tau}u(\tau)+je^{\tau}u(-\tau)$$

چون فرآیند WSS است و $S_X(f)$ در $f=0$ فاقد ضربه است، پس $m_X=0$ و درنتیجه $C_X(\tau)=R_X(\tau)$ است.

ب)

$$H(f)H^*(f)=S_X(f)=\frac{(2\pi f-1)(2\pi f-1)}{(j2\pi f+1)(-j2\pi f+1)} \;\rightarrow\; H(f)=\frac{2\pi f-1}{j2\pi f+1}=-j+\frac{j-1}{j2\pi f+1}$$

$$h(t)=-j\delta(\tau)+(j-1)e^{-t}u(t) \;\rightarrow\; X(t)=h(t)*w(t)=-jw(t)+(j-1)\int_0^{\infty}e^{-\alpha}w(t-\alpha)d\alpha$$

-۱۲

$$B^2=A^2|H(f_0)|^2=\frac{A^2}{\alpha^2+4\pi^2f_0^2}\quad,$$

$$R_N(\tau)=N\delta(\tau) \;\rightarrow\; S_N(f)=N \;\rightarrow\; E\{Y_N^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}S_N(f)|H(f)|^2df=N\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2df$$

$$=N\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2dt=N\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\alpha t}dt=\frac{N}{2\alpha}$$

$$\frac{B^2}{E\{Y_N^2\}}=\frac{2A^2}{N}\frac{1}{\alpha+\frac{4\pi^2f_0^2}{\alpha}} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{B^2}{E\{Y_N^2\}})=0} \alpha=2\pi f_0\quad,\quad (\frac{B^2}{E\{Y_N^2\}})_{\max}=\frac{A^2}{2\pi f_0N}$$

-۱۳

$$\int_{-a}^{a}R_x(t_1-t_2)\varphi(t_2)dt_2=\lambda\varphi(t_1)\quad -a\le t_1\le a \;\rightarrow\; \int_{-a}^{a}e^{-c|t_1-t_2|}\varphi(t_2)dt_2=\lambda\varphi(t_1) \;\rightarrow$$

$$\int_{-a}^{t_1} e^{-c(t_1-t_2)}\varphi(t_2)\,dt_2 + \int_{t_1}^{a} e^{-c(t_2-t_1)}\varphi(t_2)\,dt_2 = \lambda\varphi(t_1) \quad \rightarrow$$

$$e^{-ct_1}\int_{-a}^{t_1} e^{ct_2}\varphi(t_2)\,dt_2 + e^{ct_1}\int_{t_1}^{a} e^{-ct_2}\varphi(t_2)\,dt_2 = \lambda\varphi(t_1) \quad (1)$$

مشتق نسبت به t_1 :

$$-ce^{-ct_1}\int_{-a}^{t_1} e^{ct_2}\varphi(t_2)\,dt_2 + e^{-ct_1}(e^{ct_1}\varphi(t_1)) + ce^{ct_1}\int_{t_1}^{a} e^{-ct_2}\varphi(t_2)\,dt_2 + e^{ct_1}(-e^{-ct_1}\varphi(t_1)) = \lambda\varphi'(t_1) \quad \rightarrow$$

$$-ce^{-ct_1}\int_{-a}^{t_1} e^{ct_2}\varphi(t_2)\,dt_2 + ce^{ct_1}\int_{t_1}^{a} e^{-ct_2}\varphi(t_2)\,dt_2 = \lambda\varphi'(t_1)$$

مشتق مجدد نسبت به t_1 :

$$c^2e^{-ct_1}\int_{-a}^{t_1} e^{ct_2}\varphi(t_2)\,dt_2 - ce^{-ct_1}(e^{ct_1}\varphi(t_1)) + c^2e^{ct_1}\int_{t_1}^{a} e^{-ct_2}\varphi(t_2)\,dt_2 + -ce^{ct_1}(e^{-ct_1}\varphi(t_1)) = \lambda\varphi''(t_1)$$

$$c^2\{e^{-ct_1}\int_{-a}^{t_1} e^{ct_2}\varphi(t_2)\,dt_2 + e^{ct_1}\int_{t_1}^{a} e^{-ct_2}\varphi(t_2)\,dt_2\} - 2c\varphi(t_1) = \lambda\varphi''(t_1) \quad \xrightarrow{(1)}$$

$$c^2\lambda\varphi(t_1) - 2c\varphi(t_1) = \lambda\varphi''(t_1) \quad \xrightarrow{(1)} \quad \varphi''(t_1) + (\frac{2c}{\lambda} - c^2)\varphi(t_1) = 0 \;\rightarrow\; \varphi''(t) + k^2\varphi(t) = 0$$

$$\rightarrow \quad \varphi_1(t) = \beta\cos(kt) \quad , \quad \varphi_2(t) = \beta'\sin(kt) \quad , \quad \lambda = \frac{2c}{c^2+k^2} \quad (2)$$

با قرار دادن $\varphi_1(t)$ در رابطهٔ (1) :

$$e^{-ct_1}\int_{-a}^{t_1} e^{ct_2}\beta\cos(kt_2)\,dt_2 + e^{ct_1}\int_{t_1}^{a} e^{-ct_2}\beta\cos(kt_2)\,dt_2 = \lambda\beta\cos(kt_1)$$

$$\boxed{\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx}{a^2+b^2} + C}$$

$$\rightarrow \quad e^{-ct_1}\frac{ce^{ct_1}\cos(kt_1) + ke^{ct_1}\sin(kt_1) - ce^{-ca}\cos(ka) + ke^{-ca}\sin(ka)}{c^2+k^2} +$$

$$e^{ct_1}\frac{-ce^{-ca}\cos(ka) + ke^{-ca}\sin(ka) + ce^{-ct_1}\cos(kt_1) - ke^{-ct_1}\sin(kt_1)}{c^2+k^2} = \lambda\cos(kt_1) \quad \rightarrow$$

$$\frac{2c\cos(kt_1) - ce^{-ca-ct_1}\cos(ka) + ke^{-ca-ct_1}\sin(ka) - ce^{-ca+ct_1}\cos(ka) + ke^{ca+ct_1}\sin(ka)}{c^2+k^2} = \lambda\cos(kt_1)$$

$$\xrightarrow{(2)} \quad \frac{-ce^{-ca-ct_1}\cos(ka) + ke^{-ca-ct_1}\sin(ka) - ce^{-ca+ct_1}\cos(ka) + ke^{-ca+ct_1}\sin(ka)}{c^2+k^2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$-ce^{-ct_1}\cos(ka) + ke^{-ct_1}\sin(ka) - ce^{ct_1}\cos(ka) + ke^{ct_1}\sin(ka) = 0 \quad \rightarrow$$

$$(-c\cos(ka)+k\sin(ka))(e^{-ct_1}-e^{ct_1})=0 \qquad (for\ all\ -a\le t_1\le a) \quad\rightarrow\quad -c\cos(ka)+k\sin(ka)=0$$

$\rightarrow \quad \tan ka=\dfrac{c}{k}$: تعداد نامتناهی ریشه $\rightarrow \quad \tan(\omega_n a)=\dfrac{c}{\omega_n}$ (3) , ω_n : ریشهٔ n ام معادله $\rightarrow$

$$\varphi_{1n}(t)=\beta_n\cos(\omega_n t) \xrightarrow{(2)} \lambda_n=\frac{2c}{c^2+\omega_n^2} \ (4)$$

$\{\varphi_{1n}(t)\}$ یک دسته تابع اورتونرمال است $\rightarrow \quad \int_{-a}^{a}\varphi_{1n}^2(t)\,dt=1 \rightarrow \int_{-a}^{a}\beta_n^2\cos^2(\omega_n t)\,dt=1 \rightarrow$

$$\frac{\beta_n^2}{2}[t+\frac{1}{2\omega_n}\sin(2\omega_n t)]\Big|_{-a}^{a}=1 \rightarrow \beta_n^2[a+\frac{1}{2\omega_n}\sin(2\omega_n a)]=1 \rightarrow \beta_n^2[a+\frac{1}{2\omega_n}\frac{2\tan(\omega_n a)}{1+\tan^2(\omega_n a)}]=1$$

$$\xrightarrow{(3)} \beta_n^2[a+\frac{1}{2\omega_n}\frac{2\frac{c}{\omega_n}}{1+(\frac{c}{\omega_n})^2}]=1 \rightarrow \beta_n^2[a+\frac{1}{2}\frac{2c}{\omega_n^2+c^2}]=1 \xrightarrow{(4)} \beta_n=(a+\lambda_n/2)^{-1/2}$$

با قرار دادن $\varphi_2(t)$ در رابطهٔ (1):

$$e^{-ct_1}\int_{-a}^{t_1}e^{ct_2}\beta'\sin(kt_2)\,dt_2+e^{ct_1}\int_{t_1}^{a}e^{-ct_2}\beta'\sin(kt_2)\,dt_2=\lambda'\beta'\sin(kt_1)$$

$$\boxed{\int e^{ax}\sin(bx)\,dx=\frac{ae^{ax}\sin(bx)-be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2}+C}$$

$$\rightarrow \quad e^{-ct_1}\frac{ce^{ct_1}\sin(kt_1)-ke^{ct_1}\cos(kt_1)-ce^{-ca}\sin(ka)-ke^{-ca}\cos(ka)}{c^2+k^2}+$$

$$e^{ct_1}\frac{-ce^{-ca}\sin(ka)-ke^{-ca}\cos(ka)+ce^{-ct_1}\sin(kt_1)+ke^{-ct_1}\cos(kt_1)}{c^2+k^2}=\lambda'\sin(kt_1) \quad\rightarrow$$

$$\frac{2c\sin(kt_1)-ce^{-ca-ct_1}\sin(ka)-ke^{-ca-ct_1}\cos(ka)-ce^{-ca+ct_1}\sin(ka)-ke^{ca+ct_1}\cos(ka)}{c^2+k^2}=\lambda'\sin(kt_1)$$

$$\xrightarrow{(2)} \frac{-ce^{-ca-ct_1}\sin(ka)-ke^{-ca-ct_1}\cos(ka)-ce^{-ca+ct_1}\sin(ka)-ke^{-ca+ct_1}\cos(ka)}{c^2+k^2}=0 \rightarrow$$

$$ce^{-ct_1}\sin(ka)+ke^{-ct_1}\cos(ka)+ce^{ct_1}\sin(ka)+ke^{ct_1}\cos(ka)=0 \quad\rightarrow$$

$$(c\sin(ka)+k\cos(ka))(e^{-ct_1}+e^{ct_1})=0 \qquad (for\ all\ -a\le t_1\le a) \quad\rightarrow\quad c\sin(ka)+k\cos(ka)=0 \quad\rightarrow$$

$\cot(ka)=\dfrac{-c}{k}$: تعداد نامتناهی ریشه $\rightarrow \quad \cot(\omega'_n a)=\dfrac{-c}{\omega'_n}$ (5) , ω'_n : ریشهٔ nام معادله $\rightarrow$

$$\varphi_{2n}(t)=\beta'_n\sin(\omega'_n t) \xrightarrow{(2)} \lambda'_n=\frac{2c}{c^2+\omega'^2_n} \ (6)$$

یک دسته تابع اورتونرمال است $\{\varphi_{2n}(t)\}$ $\rightarrow$ $\int_{-a}^{a}\varphi_{2n}^2(t)\,dt=1$ $\rightarrow$ $\int_{-a}^{a}\beta_n'^2\sin^2(\omega_n' t)\,dt=1$ $\rightarrow$

$$\frac{\beta_n'^2}{2}[t-\frac{1}{2\omega_n'}\sin(2\omega_n' t)]\Big|_{-a}^{a}=1 \rightarrow \beta_n'^2[a-\frac{1}{2\omega_n'}\sin(2\omega_n' a)]=1 \rightarrow$$

$$\beta_n'^2[a-\frac{1}{2\omega_n'}\frac{2\tan(\omega_n' a)}{1+\tan^2(\omega_n' a)}]=1 \xrightarrow{(5)} \beta_n'^2[a-\frac{1}{2\omega_n'}\frac{2\frac{c}{\omega_n'}}{1+(\frac{c}{\omega_n'})^2}]=1 \rightarrow \beta_n'^2[a-\frac{1}{2}\frac{2c}{\omega_n'^2+c^2}]=1$$

$$\xrightarrow{(6)} \quad \beta'_n=(a-\lambda'_n/2)^{-1/2}$$

بنابراین:

$$\hat{x}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n b_n\varphi_{1n}(t)+\beta'_n b'_n\varphi_{2n}(t) \;=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n b_n\cos(\omega_n t)+\beta'_n b'_n\sin(\omega'_n t)$$

که در آن:

$$E\{b_n^2\}=\lambda_n=\frac{2c}{c^2+\omega_n^2} \quad , \quad E\{b_n'^2\}=\lambda'_n=\frac{2c}{c^2+\omega_n'^2}$$